

Leçon 235: Problème d'intervention de symbole en analyse

I. Intervention de limite X un ensemble, $(E, \|\cdot\|)$ e.v.m, (f_n) suite de fonctions $x \mapsto E$ et $f: X \rightarrow E$

a) Autours de la convergence uniforme

Def. 1: On dit que (f_n) conv. vers f si $\forall x \in X, (f_n(x))$ conv. vers $f(x)$.

Ex. 2: $\forall n \in \mathbb{N} f_n: x \in [0,1] \mapsto x^n$ conv. vers $f = 11_{\{1\}}$ sur $[0,1]$.

Def. 3: On dit que (f_n) conv. vers f si $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N \Rightarrow \forall x \in X, \|f_n(x) - f(x)\| \leq \varepsilon$.

Prop. 4: Si (f_n) conv. vers f alors (f_n) conv. vers f .

Prop. 5: (f_n) conv. vers f si $\sup_{x \in X} \|f_n(x) - f(x)\| \rightarrow 0$

Ex. 6: La réciproque de la prop. 4 n'est pas toujours vraie, en effet en reprenant les notations de l'ex. 2. on a $\sup_{x \in [0,1]} \|x^n - f(x)\| = 1 \not\rightarrow 0$

Thm. 7: (Critère de Cauchy uniforme) On eq $(E, \|\cdot\|)$ est un E.v.m. (f_n) conv. si $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tq $\forall n, p > N \Rightarrow \forall x \in X \|f_n(x) - f_p(x)\| \leq \varepsilon$

Rmq. 8: Si E n'est pas complet on a que l'implication " $\Leftarrow$ "

Def. 9: On appelle série des fonctions f_n et on note $\sum f_n$ la suite (S_n) où $S_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k(x)$

$\rightarrow$ On dit que $\sum f_n$ conv. sur X si (S_n) conv. sur X .

$\rightarrow$ On dit que $\sum f_n$ conv. sur X si (S_n) conv. sur X .

Rmq. 10: Ainsi tous les résultats qui seront établis sur des suites de fonctions passeront être transférés pour des séries de fonctions.

Def. 11: $\sum f_n$ conv. normalement (c.v.m.) sur X si $\forall n \in \mathbb{N} f_n$ bornée et $\sum \|f_n\|_X$ conv.

Prop. 12: Si $\sum f_n$ c.v.m. alors $\sum f_n$ conv. (c.v.m. $\Rightarrow$ conv. $\Rightarrow$ c.v.s.)

b) Continuité

Thm. 13: Si (f_n) conv. vers f et $\forall n \in \mathbb{N} f_n$ est continue en $x_0 \in X$, alors f est continue en x_0 .

Ex. 14: La conv. est importante (x^n) conv. vers $11_{\{1\}}$ qui n'est pas continue.

Thm. 15: (Dini) I intervalle de $\mathbb{R}$.

(1) (f_n) suite croissante de fonctions continues sur I tq (f_n) conv. vers f continue, alors (f_n) conv. vers f .

(2) (f_n) suite de fonctions croissantes continue sur I tq (f_n) conv. vers f continue, alors (f_n) conv. vers f .

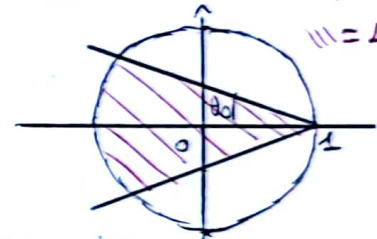
Thm. 16: (Double limite) Si (f_n) conv. vers f , $a \in \bar{X}$ $\lim_{x \rightarrow a} f_n(x)$ existe alors $\lim_{x \rightarrow a} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x)$.

Ex. 17: La conv. est importante $f_n: x \in [0,1] \mapsto x^n$ on a $\lim_{x \rightarrow 1} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 \neq 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow 1} f_n(x)$

Ex. 18: $f_n: x \in \mathbb{R} \mapsto \arctan(\frac{x}{n})$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow \infty} f_n(x) = \frac{\pi}{2} \neq 0 = \lim_{x \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$

Thm. 19: (Abel Angulaire) Soit $\sum a_n z^n$ de rayon de conv. ≥ 1 tq $\sum a_n$ cv. Notons f la somme de cette série entière sur $D(0,1)$. $\forall \theta_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$ posons $\Delta_{\theta_0} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1, \text{ et } \exists p > 0, \exists \theta \in [\theta_0, \theta_0 + \pi], z = 1 - pe^{i\theta}\}$

Alors $\lim_{z \rightarrow 1, z \in \Delta_{\theta_0}} f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$



Thm. 20: (Tauberien faible) $\sum a_n z^n$ série entière de rayon de conv. ≥ 1 et f la somme sur le disque unité. Sq $\exists S \in \mathbb{C}$ tq $\lim_{x \rightarrow 1, x \in \mathbb{R}} f(x) = S$. Si $a_n = o(\frac{1}{n})$ alors $\sum a_n$ cv et $S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$

c) Dérivation $X = [a,b]$ intervalle de $\mathbb{R}$

Thm. 21: Si (f_n) dérivable, (f_n) conv. vers f , (f_n') conv. alors $\forall x \in [a,b] f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n'(x)$.

Rmq. 22: Ce théorème peut s'étendre à des fonctions $\mathbb{C}^k$.

Thm. 23: Ici on suppose que E est complet. Si (f_n) est $\mathcal{C}^1$, si $\exists x_0 \in [a,b]$ tq $(f_n(x_0))$ cv et (f_n') conv. sur $[a,b]$ vers g .

[600]

p. 238

[ELAM]

p. 148

[ELAM]

p. 146

[HAUS]

p. 235

[600]

p. 263

-264

DEV1

[ELAM]

p. 198
- 151TOUTS
p. 302[ELAM]
p. 151
- 152[BRI]
p. 133
- 136MAIS
p. 249

Alors (f_n) conv sur $[a, b]$ vers $f \in \mathcal{C}^1$ et $f' = g$.

Rmq. 23: De même on peut en déduire un théorème pour les fonctions de classe $\mathcal{C}^k$.

Ex. 24: La fonction zeta de Riemann $\zeta: s \in]1, +\infty[\mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$.

II. Intégrales et interversion

a) Convergence uniforme et intégration ($a, b \in \mathbb{R}$) $\in$ Riemann

Thm. 25: Si (f_n) conv et $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n intégrable sur $[a, b]$. Alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$.

Rmq. 26: L'hypothèse de conv sur $[a, b]$ peut être remplacée par une convergence simple et de la convergence uniforme sur tout compact.

b) Théorèmes de convergence sous l'intégrale $(X, \mathcal{A}, \mu)$ espace mesuré

Thm. 27: (Beppo Levi) Si (f_n) croissante de fonction mesurables alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu = \int_X \lim_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu$

Thm. 28: (Lemme de Fatou) Soient $(f_n) \geq 0$ mesurables alors $0 \leq \int \liminf f_n \leq \liminf \int f_n \leq \infty$

Ex. 29: (Cas d'égalité stricte). $A \in \mathcal{A}$ et (f_n) tq $\forall n \in \mathbb{N}$ $f_n = 1_A$, $f_{n+1} = 1_{A^c}$

Thm. 30: (convergence dominée) (f_n) intégrables tq (f_n) conv p.p et $\exists g$ intégrable tq $\forall n \geq 1$ $|f_n| \leq g$. Alors $\exists \int$ intégrable tq $f_n \xrightarrow{p.p} f$ et $\lim \int f_n = \int \lim f_n$.

Ex. 31: $f_n: x \in [0, 1] \mapsto \begin{cases} nx & 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ -n^2x + 2n & \frac{1}{n} \leq x \leq \frac{2}{n} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ (d'après annexe 0)
 $\lim \int_0^1 f_n = 1 \neq 0 = \int \lim f_n$

c) Intégrales à paramètre (E, d) métrique, $u, v \in E$, $f: E \times X \rightarrow \mathbb{K}$

Thm. 32: (continuité sous le signe $\int$) Si:

- $\forall u \in E$, $x \mapsto f(u, x)$ est mesurable ds $(X, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{K}, \mathcal{B}(\mathbb{K}))$

- $u \mapsto \int f(u, x)$ est p.p continue en u_0

- $\exists g$ intégrable tq $\forall u \in E$ $|f(u, x)| \leq g(x)$ pour presque tout x .

Alors $F(u) := \int f(u, x) d\mu(x)$ est continue en u_0 .

Thm. 34: (Dérivation sous le signe $\int$) $E = \mathbb{R}$ intervalle non vide $\mathbb{R}$ Si f vérifie:

- $\forall u \in I$, $f(u, \cdot)$ est intégrable

- pour presque tout x $\frac{\partial f}{\partial u}(u, x)$ existe

- $\exists g$ intégrable tq $\forall u \in I$ $|\frac{\partial f}{\partial u}(u, x)| \leq g(x)$ pour presque tout x .

Alors $F(u) := \int f(u, x) d\mu(x)$ est définie et dérivable sur I et

$$F'(u) = \int \frac{\partial f}{\partial u}(u, x) d\mu(x).$$

Ex. 35: $\forall t > 0$ $f_t(x) = \int_0^x e^{-t-x} dx$ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$

Thm. 36: (Holomorphie sous $\int$) $E = W$ ouvert de $\mathbb{C}$.

Si $f: W \rightarrow \mathbb{C}$ vérifie:

• $\forall z \in W$, $x \mapsto f(z, x)$ intégrable

• $\forall z \in W$ (p.p), $z \mapsto f(z, x)$ holomorphe sur W

• pour tout compact K de W , $\exists g$ intégrable positive tq $|f(z, x)| \leq g(x) \forall z \in K$

Alors $F(z) = \int f(z, x) d\mu$ est holomorphe sur W et $F'(z) = \int \frac{\partial f}{\partial z}(z, x) d\mu$
(Ex: $\int_0^1 e^{xz} dx = \frac{e^z - 1}{z}$)

c) Théorèmes de Fubini

Thm. 37: (Fubini - Tonelli) $f: (X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) \rightarrow \mathbb{R}_+$ mesurable alors:

- $x \mapsto \int_Y f(x, y) d\mu(y)$ et $y \mapsto \int_X f(x, y) d\mu(x)$ sont resp. $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ -mesurables

$$\int_{X \times Y} f d(\mu \otimes \nu) = \int_X \int_Y f d\mu(y) d\mu(x) = \int_Y \int_X f d\mu(x) d\mu(y)$$

Thm. 38: (Fubini - Lebesgue). Si $f \in L^1(\mu \otimes \nu)$ alors:

- Pour p.p $x \mapsto f(x, y) \in L^1(\nu)$

- Pour p.p $y \mapsto f(x, y) \in L^1(\mu)$

[BRI]
p. 151[BRI]
p. 152[BRI]
p. 314

[BRJ]
p. 235
- 238

- $x \mapsto \int_Y f(x, y) d\mu(y) \in L^1(\mu)$ et $y \mapsto \int_X f(x, y) d\mu(x) \in L^1(\mu)$ et sont définies p.p.

$$-\int_{X \times Y} f d\mu^2 = \int_X \int_Y f d\mu(y) d\mu(x) = \int_Y \int_X f d\mu(x) d\mu(y).$$

Ex. 39: $f(x, y) = 2e^{-2xy} - e^{-xy}$, $\int_{(0, \infty)} \int_{\mathbb{R}^+} f \neq \int_{\mathbb{R}^+} \int_{(0, \infty)} f$

III. Application à l'analyse de Fourier

a) Convolution

Def. 40: On dit que $f, g: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ sont convolables si pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$, $t \mapsto f(x-t)g(t)$ est intégrable. On définit alors le produit de convolution de f et g par $(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-t)g(t) dt$

Prop. 41: Dans L^1 on a que $f * g$ existe toujours et: $f * g$ convolable

- $f * g = g * f$
- $f * (\alpha g + \beta h) = \alpha(f * g) + \beta(f * h)$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{C}$)

Thm. 42: (convolution dans L^1) $f, g \in L^1$

- pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$ $t \mapsto f(x-t)g(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^d$
- $f * g$ est intégrable sur $\mathbb{R}^d$
- $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$
- $(L^1(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_1)$ muni du produit de convolution est une algèbre de Banach commutative.

c) Transformée de Fourier

Def. 43: On appelle transformée de Fourier de f , $\hat{f}: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ $\xi \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i \langle x, \xi \rangle} dx$

Lemme 44: (Riemann-Lebesgue) $\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \hat{f}(\xi) = 0$

Thm 45: $\hat{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est continue bornée par $\|f\|_1$

Thm 46: $\widehat{f * g} = \hat{f} \cdot \hat{g}$

Thm. 47: (formule de dualité) $\int_{\mathbb{R}^d} f(u) \hat{g}(u) du = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(v) g(v) dv$

[ELAM]
p. 75

[ELAM2]
p. 78

[ELAM2]
p. 109
- 113

[ELAM]
p. 122

[LJ]
p. 112

DEVI

[LJ]
p. 111
- 115

Thm. 48: (formule de dérivation) $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ tq $x \mapsto x_j f(x) \in L^1(\mathbb{R}^d)$ Alors $\hat{f}$ admet une dérivée $\partial_j \hat{f}$ continue bornée sur $\mathbb{R}^d$ donnée par $\forall \xi \in \mathbb{R}^d$, $\partial_j (\hat{f}(\xi)) = -i \widehat{x_j f(x)}(\xi)$

IV. Théorème de Baire et conséquences

Thm 49: (thm Baire) Soit un Banach, la réunion d'une famille dénombrable de fermés d'intérieur vide est encore d'intérieur vide.

Rem 50: On peut énoncer un théorème analogue avec des ouverts: l'intersection dénombrable d'ouvert dense est encore dense.

Thm 51: (Banach-Steinhaus) E, F dans Banach, $T_i: E \rightarrow F$ linéaires continues ($i \in I$ quelconque) tq $\forall x \in E$ $\sup_{i \in I} \|T_i x\|_F < \infty$ alors $\sup_{i \in I} \|T_i\|_{L(E, F)} < \infty$.

Corollaire 52: E, F Banach, $T_n: E \rightarrow F$ $n \geq 1$ linéaires continues tq $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n x = T x$ existe $\forall x \in E$. Alors:

- $\sup \|T_n\|_{L(E, F)} < \infty$
- $T: E \rightarrow F$ est linéaire continue

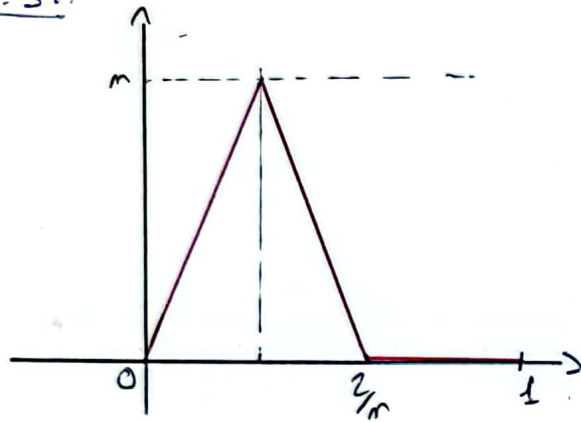
De plus $\|T\|_{L(E, F)} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|T_n\|_{L(E, F)}$

Thm 53: (application ouverte) E, F Banach, $T: E \rightarrow F$ linéaire continue surjective, alors $\exists c > 0$ tq $T(B(0, 1)) \supset B(0, c)$

Corollaire 54: E, F Banach, $T: E \rightarrow F$ linéaire continue bijective Alors T^{-1} est continue.

Annexe:

① Ex. 31:



Références:

[ELAM1]: EL Amrani, Suites et $\mathbb{C}$ de jst

[GOU]: Gaudon, Analyse (3ème ed)

[MAU]: Mauchecorne, Les C-ess en maths

[BRI]: Briano - Pagès, Théorie de l'intégration

[QUE]: Zwily - Queffelec, Analyse pour l'agreg

[ELAM2]: EL Amrani, Analyse de Fourier